



Probabilidades e Estatística 2004/05

Breve resolução de dois exercícios para ilustrar a distribuição normal

LEIC, LERCI, LEE

O comprimento das peças produzidas por uma máquina é uma variável aleatória normal com valor esperado μ (mm) e variância σ^2 (mm²). Uma peça é defeituosa se o seu comprimento diferir do valor esperado mais do que σ . Sabe-se que 50% das peças produzidas têm comprimento inferior a 2.5 mm e 47.5% das peças produzidas têm comprimento entre 2.5 mm e 3.42 mm.

- (a) Calcule μ e σ .
- (b) Determine a probabilidade de que uma peça seja não defeituosa.
- (c) Suponha que se pretende alterar os limites de especificação de peça defeituosa. Assim uma peça é considerada defeituosa se o seu comprimento diferir do valor esperado mais do que k vezes σ . Caso se pretenda que no máximo 1% das peças sejam defeituosas, que valor deverá tomar k ?
- (d) Suponha que são retiradas da produção da máquina 60 peças, sendo que os seus comprimentos são independentes (e assumindo que a probabilidade de cada uma ser defeituosa é 0.01). Determine a probabilidade de que neste conjunto de 60 peças menos de 4 sejam defeituosas.

Resolução:

- (a) Se $P(X < 2.5) = 0.5$ então $E[X] = \mu_X = 2.5$ (uma vez que qualquer v.a. com distribuição normal tem função densidade de probabilidade simétrica em torno do

seu valor esperado, donde resulta, em particular, que a mediana de uma variável aleatória com distribuição normal é sempre igual ao seu valor esperado).

Por outro lado se 47.5% das peças produzidas têm comprimento entre 2.5 mm e 3.42 mm, então significa que $P(2.5 < X < 3.42) = 0.475$. Mas como $P(X < 2.5) = 0.5$, então vem que

$$\begin{aligned} P(X < 3.42) &= P(2.5 < X < 3.42) + P(X < 2.5) = 0.975 \\ \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{3.42 - 2.5}{\sigma_X}\right) &= 0.975 = \end{aligned}$$

i.e. $\frac{3.42-2.5}{\sigma_X}$ é o quantil de probabilidade 0.975 de uma normal reduzida, que geralmente se denota por $\Phi^{-1}(0.975)$. Consultando a tabela de quantis vem que o quantil de probabilidade 0.975 da normal reduzida é o valor 1.96, donde $\sigma_X = 0.4694$.

- (b) Uma peça é defeituosa se o seu comprimento diferir do valor esperado mais do que σ , donde a probabilidade de uma peça retirada ao acaso não ser defeituosa é dada por

$$P(|X - \mu_X| < \sigma_X) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.6926.$$

- (c) Suponhamos então que os limites de especificação do comprimento para que uma peça não seja defeituosa são alterados, passando agora para $|X - \mu_X| < k\sigma_X$ onde k é tal que

$$\begin{aligned} P(|X - \mu_X| < k\sigma_X) &= 0.99 \Leftrightarrow \\ P(-k\sigma_X < X - \mu_X < k\sigma_X) &= 0.99 \Leftrightarrow \\ P\left(-k < \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} < k\right) &= 0.99 \Leftrightarrow \\ \Phi(k) - \Phi(-k) &= 0.99 \Leftrightarrow \\ \Phi(k) - (1 - \Phi(k)) &= 0.99 \Leftrightarrow \\ \Phi(k) &= 0.995 \Leftrightarrow \\ k &= \Phi^{-1}(0.995) = 2.5758 \end{aligned}$$

donde uma peça é considerada defeituosa se o seu comprimento diferir do valor esperado mais do que $2.5758 \times \sigma$.

- (d) Nesta alínea considere-se uma nova v.a. Y , com Y sendo o número de peças defeituosas encontradas num lote de 60. Assumindo que os comprimentos das peças são v.a. independentes e com a mesma distribuição, vem que

$$Y \sim \text{Bin}(60, 0.1)$$

Como se está nas condições de aproximação da Binomial pela Normal (uma vez que $n \times p = 6 > 5$ e $n \times (1 - p) = 5.4 > 5$ vem que

$$P(Y < 4) = P(Y \leq 3) \approx \Phi\left(\frac{3 + 0.5 - 6 \times 0.1}{\sqrt{6 \times 0.1 \times 0.9}}\right) = 3.95 = 0.999961$$

O número de itens dum certo tipo procurados num armazém durante uma semana segue uma distribuição de Poisson com $\lambda = 50$. Calcule a dimensão mínima do *stock* a adquirir de modo a que a probabilidade de satisfazer a procura semanal seja de 98% (use a aproximação à normal).

Resolução: Seja X a v.a. que designa o número de itens procurados num armazém. Como $X \sim \text{Poisson}(50)$, estamos nas condições de aproximação normal da distribuição Poisson ($\lambda > 5$). Assim, como $P(X \leq S) \approx \Phi\left(\frac{S+0.5-50}{\sqrt{50}}\right)$ e

$$\Phi\left(\frac{S+0.5-50}{\sqrt{50}}\right) = 0.98 \Leftrightarrow \frac{S+0.5-50}{\sqrt{50}} = \Phi^{-1}(0.98) = 2.0537 \Leftrightarrow S = 64.02$$

$\min\{S : P(X \leq S) \geq 0.98\} = 65$. Ou seja, a dimensão mínima do *stock* a adquirir de modo a que a probabilidade de satisfazer a procura semanal seja de 98% é 65.